

Научная статья
УДК 781.1
DOI: 10.26086/NK.2026.81.2.009

О некоторых последовательностях натуральных чисел в 72-ступенной системе равномерного деления октавы



Буччо Даниэле

Казанская государственная консерватория
им. Н. Г. Жиганова, Казань, Россия
E-mail: danielebuccio@yahoo.it,
ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-8371-1258>

Аннотация. В данной статье теоретически обоснована звуковысотная организация 72-ступенной микро-тоновой (шестинатоновой) системы. Автор опирается на оригинальные разработки в области микрохроматики Ивана Александровича Вышнеградского, а также теоретиков второй половины XX века, аргументируя перспективность шестинатонного деления октавы математически — ее внутренними связями с числовыми последовательностями и геометрическими фигурами.

Ключевые слова: ультрахроматизм, микрохроматика, двенадцатая доля тона, 72-ступенная равномерная темперация, интервальные циклы, последовательности натуральных чисел, Иван Александрович Вышнеградский

Для цитирования: Буччо Д. О некоторых последовательностях натуральных чисел в 72-ступенной системе равномерного деления октавы // Актуальные проблемы высшего музыкального образования. 2026. № 2 (81). С. 45–53. <http://doi.org/10.26086/NK.2026.81.2.009>

Original article

On Sequences of Natural Numbers in the System of 72 Equal Divisions of the Octave

Buccio Daniele

Zhiganov Kazan State Conservatoire,
Kazan, Russia
E-mail: danielebuccio@yahoo.it,
ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-8371-1258>

Abstract. The present article examines the procedure of reducing sequences of natural numbers modulo 72 in order to define specific pitch class sets within the tempered system of twelfths of tone. The specific properties of number sequences are reflected and manifested in interval relationships highlighted by the characteristic structure of the system. The study starts from the reduction of polygonal, polytopic, and non-figural number sequences and is based on a rethinking of positions on cyclical techniques developed by 20th-century theorists and, after World War II, by Ivan Aleksandrovich Wyshnegradsky in the ultrachromatic field. I. A. Wyshnegradsky considered the system in twelfths of tone as the limit of his theoretical reflections and compositional goals, in reason of its aptitude for containing all the intervallic relationships observed in the domains of the quarter tones, sixth tones, and the traditional system. The representation of intervals formed by sequences within the heptacontakaidigon (hebdomecontadigon) correlates with the blurring of the opposition between melodic and harmonic intervals. This extractive process represents a pre-compositional plan aimed at the conscious organisation of intervallic qualities, which are subsequently made available for creative purposes.

Keywords: Ultrachromatism, Microchromatics, Twelfth Tone, 72-EDO, Interval Cycles, Sequences of Natural Numbers, Ivan Aleksandrovich Wyshnegradsky

© Буччо Д., 2026

For citation: Buccio D. On Sequences of Natural Numbers in the System of 72 Equal Divisions of the Octave. Aktualnye problemy vysshego muzykal'nogo obrazovaniya = Actual problems of high musical education. 2026; 2 (81); 45–53 (In Russ.). <http://doi.org/10.26086/NK.2026.81.2.009>

Обоснование звуковых систем посредством интервальных циклов, предназначенных для охвата составляющих элементов, пронизывало западную музыкально-теоретическую традицию с античности. На протяжении веков, особенно после принятия традиционной темперированной системы, рассмотрение циклических структур все больше приобретало технико-композиционный интерес, одновременно снижая срочность обоснования системы, ориентируясь скорее на эстетизации процесса¹. В ультрахроматическом контексте интервальные циклы были предметом теоретических исследований и композиционной практики Ивана Александровича Вышнеградского (1893–1979) [2; 3; 4; 5; 6; 7], первоначально не без пищи для размышлений, почерпнутой из древнегреческой теории. «Циклическая гармония» Вышнеградского в своей наиболее строгой формулировке после Второй мировой войны развивалась посредством суммирования наборов интервалов; Вышнеградский использовал циклические структуры для определения тематического материала своих произведений в рамках систем различной плотности. В возрасте 26 лет он пришел к теоретическому установлению двенадцатой доли тона как тончайшего интервала, способного осуществлять двоичное и троичное деление, а в 1954 году сочинил свои первые произведения в этой системе с использованием шести фортепиано. Эти намерения привели к растворению противопоставления мелодической и гармонической составляющих, уже характерного для определенного признания композиционной техники более поздних музыкальных произведений А. Н. Скрябина.

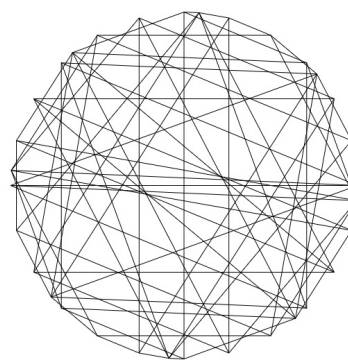
Продолжая циклическую перспективу в рамках той же системы двенадцатых долей тона, затрагивая аспекты теории множеств, предлагается здесь рассмотреть процедуру определения групп высотных классов, полученных путем сведения последовательностей натуральных целых чисел к системе по модулю 72. Цель вписывания числовые последовательности в систему двенадцатых долей тона — выявления структурных свойств циклических интервальных соотношений. Данное теоретическое исследование призвано повысить осведомленность

периодичности интервальных структур в этой конкретной системе согласно мультипликативному принципу, а также для того, чтобы в дальнейшем наблюдать за взаимосвязями, и изучить, как одна и та же последовательность может развиваться в системах различной плотности; специфические свойства числовых последовательностей отражаются и проявляются в интервальных соотношениях, высвеченных характерной структурой системы. Этот процесс представляет собой предкомпозиционный план, направленный на осознанную организацию качеств интервалов, которые впоследствии предоставляются в распоряжение творческой деятельности. Предлагается представление полученных групп звуков и интервальных соотношений в виде многоугольника с 72 сторонами, также называемого гептаконтадигон или эбдомеконтадигон. Сегменты, или хорды, образующие его, показывают двумерные изображения интервалов между высотными классами, в которых направление взаимно компенсируется. В этом представлении восходящие и нисходящие интервалы совпадают. Последовательности интервалов в системе двенадцатых частей тона могут следовать интервальной процедуре, заданной последовательностью, спускаемой в модуль, до тех пор, пока в конце 72 мультипликативных проходов не будет достигнута совокупность 72 элементов. Эта несуммативная процедура определяет последовательность интервалов в системе и появление звуков в разных октавах, которые напрямую вытекают из внутренних свойств рассматриваемой последовательности. Группы звуков, таким образом «спускающиеся сверху», обуславливаются конкретным модулем в зависимости от численного принципа выбранной последовательности. В этом контексте можно наблюдать периодические законы, уже хорошо известные в чистой математике. Для каждой полученной последовательности можно рассмотреть значения, относящиеся к развитию семидесяти двух пассажей, завершающих цикл, к группе звуков, полученной в конце, к интервалам между элементами этих групп (например, с точки зрения специфики внутри системы), к мультипликативной последовательности (музыкально соответствующей количеству сгенерированных восходящих октав), а также взаимосвязи между этими отношениями. Циклы могут быть моноинтервальными или мультиинтервальными и охватывать или не охватывать хроматическую целостность по завершении 72 этапа умножения. В последнем случае они приводят к неполным (несовершенным) циклам. В этом случае последовательности, способные выбирать определенные периодически повторяющиеся группы высотных классов.

В качестве отправной точки было решено вписать последовательности натуральных многоуголь-

ных чисел за их прогрессивность и за их характерную склонность к представительности. Подчеркивая сам способ разворачивания последовательности, наблюдение за «настоятельностью» определенных высот в ходе цикла позволяет выявить глубинные, поддерживающие структуры, закономерности. Рассмотрение повторяемости величин привлекает внимание к «интенсивности», значимости определенных конструкций, которые оказываются наиболее глубокими в общей интервальной структуре, коренящейся во взаимосвязи между конкретной последовательностью и конкретной системой. Наблюдение направлено на выявление периодических свойств, связывая конкретные места в звуковом пространстве — точку отдельного появления, проявляющуюся в числовых данных, — с общей структурой и с его собственным структурным принципом. Полученные наборы звуков именуются в соответствии с обычными названиями порождающих последовательностей. Обозначение высотных классов следует общепринятой нумерации от 0 до 71; классы высот обозначаются на нотном стане традиционными знаками альтерации, которые Вышнеградский окончательно установил в мае 1935 года. Знаки альтерации имеют силу только для нот, к которым они относятся.

Последовательность треугольных чисел, вписанная в модуль 72, порождает ряд классов высот с ретроградацией тритону, что характерно для разворачивания в системах с четной плотностью: {0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 6, 19, 33, 48, 64, 9, 27, 46, 66, 15, 37, 60, 12, 37, 63, 18, 46, 3, 33, 64, 24, 57, 19, 54 || 18, 55, 21, 60, 28, 69, 39, 10, 54, 27, 1, 48, 24, 1, 51, 30, 10, 63, 45, 28, 12, 69, 55, 42, 30, 19, 9, 0, 64, 57, 51, 46, 42, 39, 37, 36}.



Дважды:

{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 63, 66, 69}

Трижды:

{1, 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64}

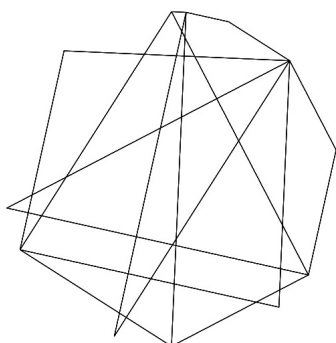
Полученная совокупность классов высот образует «Треугольную хроматику»:



32 высотных класса, сгенерированные в 35 октавах

Истоки использования треугольных соотношений восходят к изучению «Пирамиденаккорда» (Pyramidenakkord) Фрица Генриха Кляйна (1892–1977), гармонии, звучащей впервые в 1921 года в его op. 1 *Die Maschine. Eine extonale Selbstsatire für Klavier zu vier Händen* («Машина: Внетональная самосатира для фортепиано в четыре руки») и теоретически изложенной им статье 1925 года «Граница полутонного мира» [8], в контексте поиска гармоний всех интервалов². В системе двенадцатых долей тона последовательность интервалов между полученными элементами соответствует основанию 9 {периодическая структура: +1, +2, +3, +3}, то есть интервалу в $\frac{3}{4}$ тона, повторяющемуся 8 раз. Группа звуков выводится из всей четвертьтоновой гаммы, пересекающейся с гаммой в $\frac{3}{4}$ тона, на двенадцатую тона ниже.³ Та же хроматика определяется шестиугольными, 15-, 18-, 21- (без элемента 33), 27- (без элемента 42), 30-, 37- (без элемента 15), 42-, 54-, 63-, 66- и 69-угольными числами, хотя и с разными интервалами и хордами.

Значения квадратной последовательности, представленной в системе двенадцатых долей тона, представляют собой точную ретроградацию, центральной пунктом которой является тритон: {0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 9, 28, 49, 0, 25, 52, 9, 40, 1, 36, 1, 40, 9, 52, 25, 0, 49, 28, 9, 64, 49, 36, 25, 16, 9, 4, 1, 0}. Можно заметить, что она образуется в два раза большем количестве октав, чем треугольная последовательность; середина цикла совпадает с 36-й октавой.



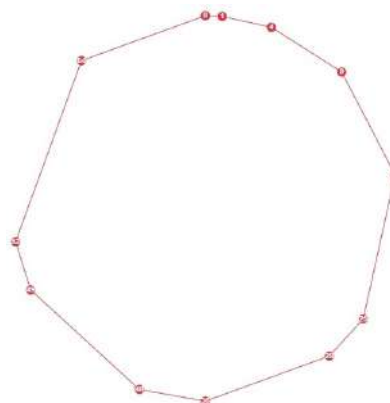
Четыре раза: {4, 16, 28, 40, 52, 64}

Шесть раз: {0, 36}

Восемь раз: {1, 25, 49}

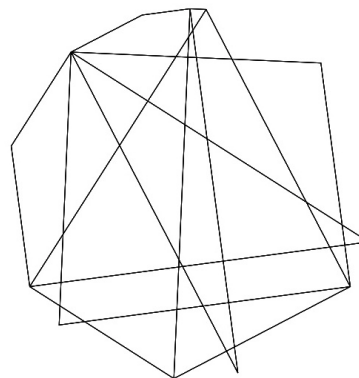
Двенадцать раз: {9}

Глубокие структуры «Квадратной хроматики» состоят из тритона, увеличенного трезвучия, расположенного на одну двенадцатую тона выше, и целотонной гаммы, расположенной на одну треть тона выше. Эта группа классов высот также формируется на основе 68-угольных чисел.



12 высотных класса, сгенерированные в 70 октавах

Последовательность семидесятидвухугольных чисел в системе имеет зеркальную связь с квадратной последовательностью. Последовательность классов высот «Семидесятидвухугольной хроматики» разделена на две части, повторяющиеся между 1–36 и 37–71; единственная секция 1–36 представляет собой полную ретроградацию: {1, 0, 69, 64, 57, 48, 37, 24, 9, 64, 45, 24, 1, 48, 21, 64, 33, 0, 37, 0, 33, 64, 21, 48, 1, 24, 45, 64, 9, 24, 37, 48, 57, 64, 69, 0}.



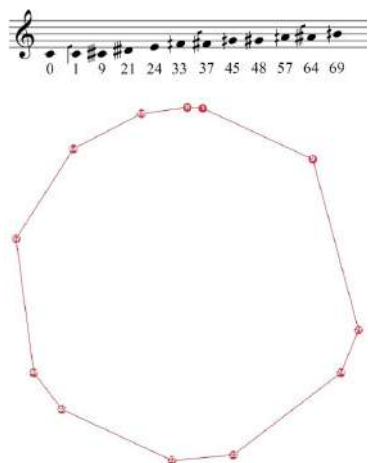
Четыре раза: {21, 33, 57, 69}

Шесть раз: {9, 37, 45}

Восемь раз: {24, 48}

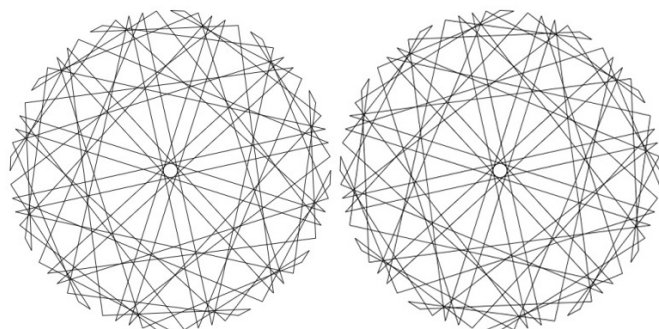
Десять раз: {1}

Шестнадцать раз: {0, 64}

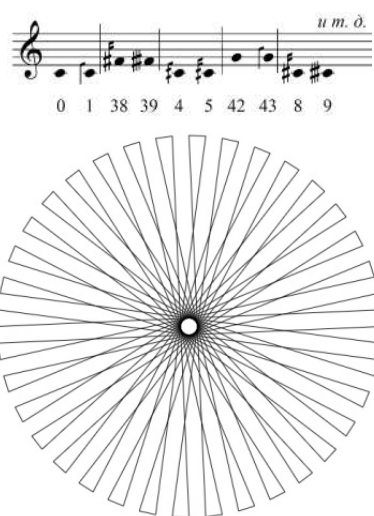


12 высотных класса, сгенерированные в 2486 октавах

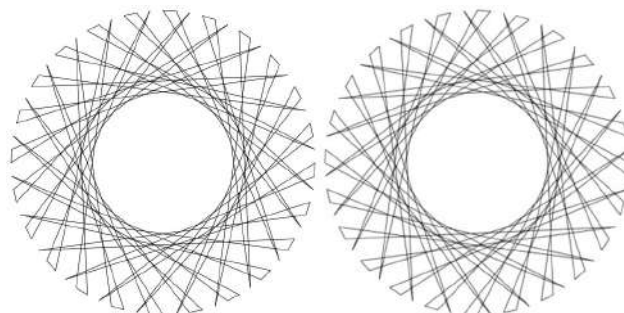
В контексте последовательностей многоугольных чисел, 14-, 26-, 38-, 50-, и 62-угольные числа способны генерировать хроматическую полноту.



14-угольные и 62-угольные

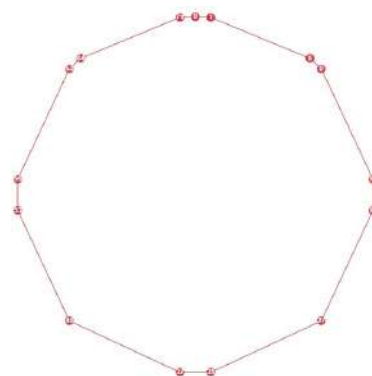


38-угольные

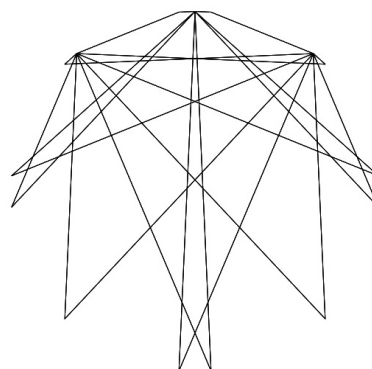


26-угольные и 50-угольные

Среди последовательностей многогранных чисел кубические числа определяют «Кубическую хроматику» в пятнадцати классах высот:



15 высотных классов, сгенерированные в 4970 октавах

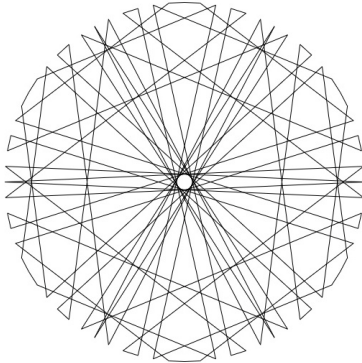


Трижды: {1, 9, 17, 19, 27, 35, 37, 45, 53, 55, 63, 71}
Двенадцать раз: {0, 8, 64}

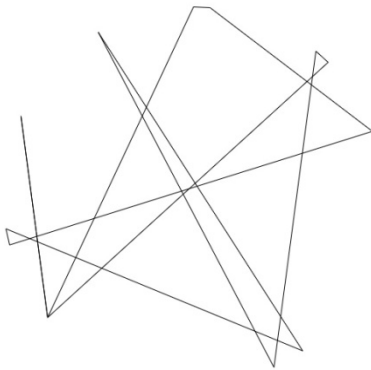
Процедура определяет последовательность из 4 групп по 6 элементов в каждой, которая повторяется три раза [36 (12 элементов 3 раза) + 36 (3 элемента 12

раз): {0, 1, 8, 27, 64, 53}; {0, 55, 8, 9, 64, 35}; {0, 37, 8, 63, 64, 17}; {0, 19, 8, 45, 64, 71}. Звуки трихорда {0, 8, 64} в соотношении $\frac{2}{3}$ тона неизменно остаются на первой, третьей и пятой позициях каждой группы.

Последовательность восьмиугольной звезды (или звёздчатого октаэдра) способная определять хроматическую полноту.



72 высотных класса в 9940 октавах



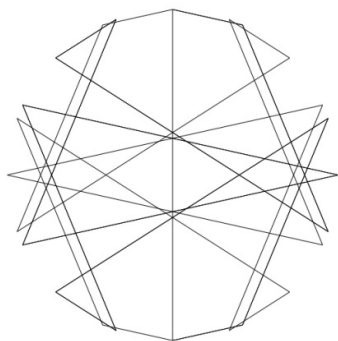
Особенность этой последовательности заключается в том, что она определяет последовательность из 12 высотных класса, транспонированных 6 раз на расстоянии нисходящего тона (или восходящей малой септимы), таким образом, чтобы сформировать полный цикл, в котором каждый класс встречается только один раз. Предварительно можно наблюдать традиционную нисходящую хроматическую последовательность на расстоянии шести звуков {0, 66, | 60, 54 | 48..}. Рассматривая последовательность интервалов первых двенадцати звуков {0, 1, 14, 51, 52, 29, 66, 31, 8, 9, 46, 59} можно заметить, что каждый интервал добавляет двенадцатую часть тона к интервалу, принадлежащему традиционной системе, и что величины {+1, +13, +37, +1, +49, +37, +37, +49, +1, +37, +13, +1} совпадают со значениями предыдущей звездной последовательности. Это устанавливает связь между последовательностью высот и последовательностью интервалов. Ретроградация — это эффект постоян-

ного увеличения процедуры умножения согласно треугольной последовательности на исходного двенадцатую тона при возвращении к модулю 72: +0 (12*0), +12 (12*1), [+24 (12*2)], +36 (12*3), [48 (12*4), 60 (12*5)], 72 (12*6), [84 (12*7), 96 (12*8), 108 (12*9)], 120 (12*10), и так далее. Если рассматриваются интервалы интервалов прогрессия является арифметической. Свойство ретроградации частично сохраняется и при возвращении группы звуков в пределы октавы: {0, 1, 8, 9, 14, 29, 31, 46, 51, 52, 59, 66}: [+1], +7, +1, +5, +15, +2, +15, +5, +1, +7 [+7]. Рассматривая соотношения между двумя полутоновыми группами {0, 1, 14, 51, 52, 29} и {66, 31, 8, 9, 46, 59}, обнаруживается постоянное чередование полутонов и чистых кварт {+6, +30, +6, +30, +6, +30} в порядках, постоянно транспонированных на одну двенадцатую тона.

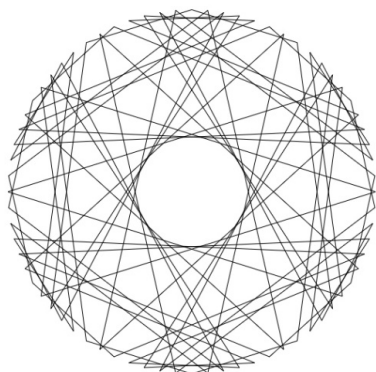
Применив ту же процедуру треугольного умножения [+0 (12*0), +12 (12*1), +36 (12*3), +72 (12*6), +120 (12*10), +180 (12*15), +252 (12*21), +336 (12*28), +432 (12*36), +540 (12*45), +660 (12*55), +792 (12*66), +936 (12*78), +1092 (12*91), +1260 (12*105), +1440 (12*120), +1632 (12*136), и так далее до семьдесят второго значения] к интервалам в системе двенадцатых долей тона, способным охватывать полные циклы [сводимым к 12 парам и их обращениям: {1–71}, {5–67}, {7–65}, {11–61}, {13–59}, {17–55}, {19–53}, {23–49}, {25–47}, {29–43}, {31–41}, {35–37}], можно устанавливать последовательности интервалов, которые следуют строго общему принципу. Полученные полные циклы основаны на обычной нисходящей хроматической гамме, которая появляется каждые шесть звуков; они сохраняют те же свойства ретроградного движения, что и восьмиугольная звездная последовательность. Полученные несовершенные циклы состоят из двенадцати звуков, за которыми следует ретроградное обращение к тритону. Обе составляющие части определяют базовую структуру на оси уменьшенного септаккорда. Этот принцип аналогичен тому, который наблюдается при изучении треугольных последовательностей в системах с чётным и нечётным порядком. Поскольку интервалы выше тритона образуют один и тот же цикл путем обращения (и одну и ту же фигуру в гептаконтигоне), список ограничен первыми членами пары. Двенадцать циклов, полученных таким образом, удовлетворяют, согласно принципу цветной нотации в двенадцатых долях тона, разработанному Вышнеградским в июле 1943 года, непрерывной последовательности цветов в соответствии со спектральной градацией.

а. Последовательность восьмиугольной звезды.

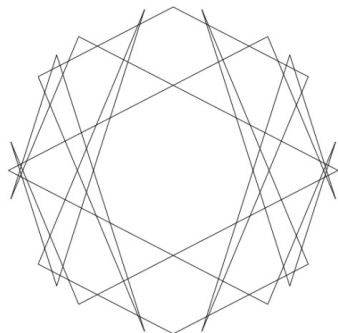
б. Последовательность интервалов: {+5, +17, +41, +5, +53, +41, +41, +53, +5, +41, +17, +5, | +5, +17, +41, +5, +53...}; несовершенный цикл: {0, 5, 22, 63, 68, 49, 18, 59, 40, 45, 14, 31, | 36, 41, 58, 27, 32, 13, 54, 23, 4, 9, 50, 67} три раза:



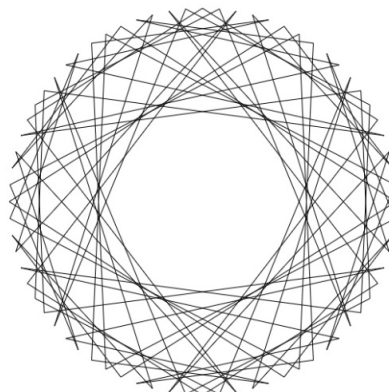
в. Последовательность интервалов: {+7, +19, +43, +7, +55, +43, +43, +55, +7, +43, +19, +7, +7, +19, +43, +7, +55...}; полный цикл: {0, 7, 26, 69, 4, 59, 30, 1, 56, 63, 34, 53, | 60, 67, 14, 57, 64, 47, 18, 61, 44, 51, 22, 41, | 48, 55, 2, 45, 52, 35, 6, 49, 32, 39, 10, 29, | 36, 43, 62, 33, 40, 23, 66, 37, 20, 27, 70, 17, | 24, 31, 50, 21, 28, 11, 54, 25, 8, 15, 58, 5, | 12, 19, 38, 9, 16, 71, 42, 13, 68, 3, 46, 65}:



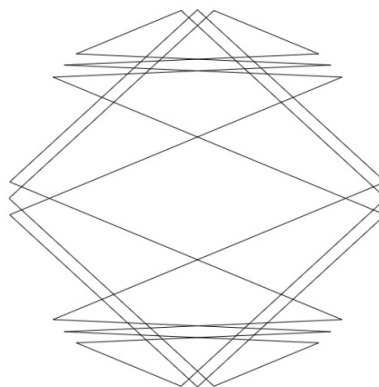
г. Последовательность интервалов: {+11, +23, +47, +11, +59, +47, +47, +59, +11, +47, +23, +11, | +11, +23, +47, +11, +59...}; несовершенный цикл: {0, 11, 34, 9, 20, 7, 54, 29, 16, 27, 2, 25, | 36, 47, 70, 45, 56, 43, 18, 65, 52, 63, 38, 61} три раза:



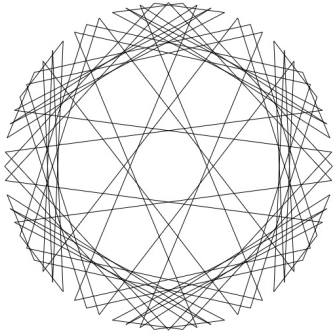
д. Последовательность интервалов: {+13, +25, +49, +13, +61, +49, +49, +61, +13, +49, +25, +13, | +13, +25, +49, +13, +61...}; полный цикл: {0, 13, 38, 15, 28, 17, 66, 43, 32, 45, 22, 47, | 60, 1, 26, 3, 16, 5, 54, 31, 20, 33, 10, 35, | 48, 61, 14, 63, 4, 65, 42, 19, 8, 21, 70, 23, | 36, 49, 2, 51, 64, 53, 30, 7, 68, 9, 58, 11, | 24, 37, 62, 39, 52, 41, 18, 67, 56, 69, 46, 71, | 12, 25, 50, 27, 40, 29, 6, 55, 44, 57, 34, 59}:



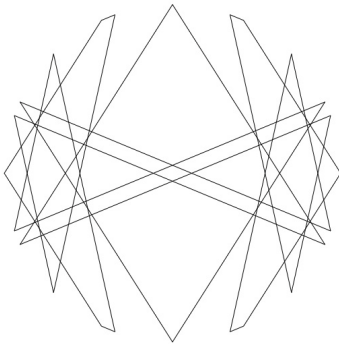
е. Последовательность интервалов: {+17, +29, +53, +17, +65, +53, +53, +65, +17, +53, +29, +17, | +17, +29, +53, +17, +65...}; несовершенный цикл: {0, 17, 46, 27, 44, 37, 18, 71, 64, 9, 62, 19, | 36, 53, 10, 63, 8, 1, 54, 35, 28, 45, 26, 55} три раза:



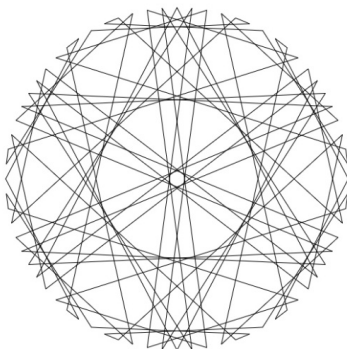
ё. Последовательность интервалов: {+19, +31, +55, +19, +67, +55, +55, +67, +19, +55, +31, +19, | +19, +31, +55, +19, +67...}; полный цикл: {0, 19, 50, 33, 52, 47, 30, 13, 8, 27, 10, 41, | 60, 7, 38, 21, 40, 35, 18, 1, 68, 15, 70, 29, | 48, 67, 26, 9, 28, 23, 6, 61, 56, 3, 58, 17, | 36, 55, 14, 69, 16, 11, 66, 49, 44, 63, 46, 5, | 24, 43, 2, 57, 4, 71, 54, 37, 32, 51, 34, 65, | 12, 31, 62, 45, 64, 59, 42, 25, 20, 39, 22, 53}:



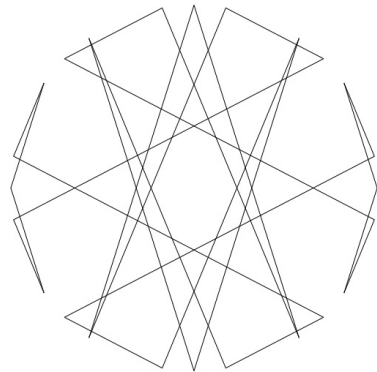
ж. Последовательность интервалов: {+23, +35, +59, +23, +71, +59, +59, +71, +23, +59, +35, +23, | +23, +35, +59, +23, +71...}; несовершенный цикл: {0, 23, 58, 45, 68, 67, 54, 41, 40, 63, 50, 13, | 36, 59, 22, 9, 32, 31, 18, 5, 4, 27, 14, 49} три раза:



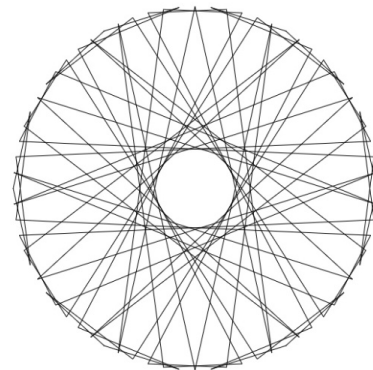
з. Последовательность интервалов: {+25, +37, +61, +25, +1, +61, +61, +1, +25, +61, +37, +25, | +25, +37, +61, +25, +1...}; полный цикл: {0, 25, 62, 51, 4, 5, 66, 55, 56, 9, 70, 35, | 60, 13, 50, 39, 64, 65, 54, 43, 44, 69, 58, 23, | 48, 1, 38, 27, 52, 53, 42, 31, 32, 57, 46, 11, | 36, 61, 26, 15, 40, 41, 30, 19, 20, 45, 34, 71, | 24, 49, 14, 3, 28, 29, 18, 7, 8, 33, 22, 59, | 12, 37, 2, 63, 16, 17, 6, 67, 68, 21, 10, 47}:



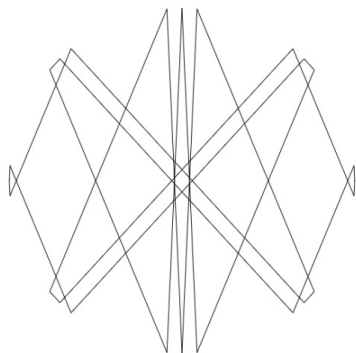
и. Последовательность интервалов: {+29, +41, +65, +29, +5, +65, +65, +5, +29, +65, +41, +29, | +29, +41, +65, +29, +5...}; несовершенный цикл: {0, 29, 70, 63, 20, 25, 18, 11, 16, 45, 38, 7, | 36, 65, 34, 27, 56, 61, 54, 47, 52, 9, 2, 43} три раза:



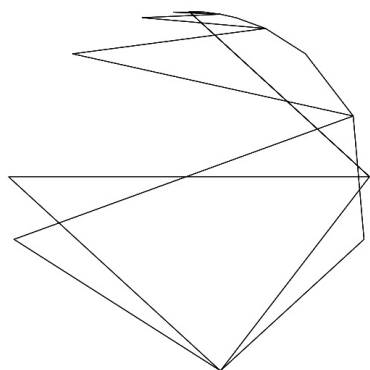
й. Последовательность интервалов: {+31, +43, +67, +31, +7, +67, +67, +7, +31, +67, +43, +31, | +31, +43, +67, +31, +7...}; полный цикл: {0, 31, 2, 69, 28, 35, 30, 25, 32, 63, 58, 29, | 60, 19, 62, 57, 16, 23, 18, 13, 20, 51, 46, 17, | 48, 7, 50, 45, 4, 11, 6, 1, 8, 39, 34, 5, | 36, 67, 38, 33, 64, 71, 66, 61, 68, 27, 22, 65, | 24, 55, 26, 21, 52, 59, 54, 49, 56, 15, 10, 53, | 12, 43, 14, 9, 40, 47, 42, 37, 44, 3, 70, 41}:



к. Последовательность интервалов: {+35, +47, +71, +35, +11, +71, +71, +11, +35, +71, +47, +35, | +35, +47, +71, +35, +11...}; несовершенный цикл: {0, 35, 10, 9, 44, 55, 54, 53, 64, 27, 26, 1, | 36, 71, 46, 45, 8, 19, 18, 17, 28, 63, 62, 37} три раза:



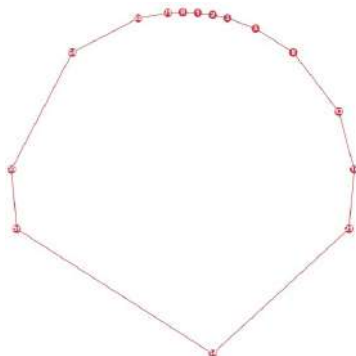
Среди последовательностей нефигурных чисел можно упомянуть «Золотую хроматику». Последовательность Фибоначчи в системе двенадцатых тона порождает группу из двадцати четырех элементов, повторяющихся три раза: {0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 17, 0, 17, 17, 34, 51, 13, 64, 5, 69, 2, 71, 1}, как характерная черта пизанского периода⁴.



Трижды: {3, 8, 21, 51, 55, 64, 69, 71}

Шесть раз: {0, 2, 5, 13, 34}

Девять раз: {1, 17}



15 высотных классов, сгенерированные
в 6922972387212 октавах

Можно наблюдать пары высотных классов относительно центра 0: {1–71}, {3–69}, {8–64}, {17–55}, {21–51}, а рассмотреть две характерные совпадающие гармонии, заключенные в две чистые кварты: {21, 34, 51} и {13, 0, 55}. Характерный моноинтервальный пентакорд, образованный тем же $17/12$ -тоновым интервалом, является тематическим материалом Этюда соч. 44 № 2 Ивана Вышнеградского (ноябрь 1958 года, отретушировано в марте 1972 года). Рассматривая последовательности отдельных интервалов или моноинтервальные гармонии этой хроматики, можно выделить следующие группы:

Пять звуков

{71, 0, 1, 2, 3} [+1, $1/12$ тона]

{69, 71, 1, 3, 5} [+2, $1/6$ тона]

{55, 0, 17, 34, 51} [+17, $17/12$ тона]

Четыре звука

{71, 2, 5, 8} [+3, $1/4$ тона]

{69, 5, 13, 21} [+8, $2/3$ тона]

{64, 13, 34, 55} [+21, $9/4$ тона]

Три звука

{69, 1, 5} и {13, 17, 21} [+4, $1/3$ тона]

{64, 69, 2} и {3, 8, 13} [+5, $5/12$ тона]

{64, 0, 8} [+8, $2/3$ тона]

{71, 8, 17} и {55, 64, 1} [+9, $3/4$ тона]

{51, 64, 5} [+13, $13/12$ тона]

Эти первоначальные соображения рассматриваются на докомпозиционном уровне. Наблюдение периодичности обеспечивает организацию взаимосвязей высот и интервальных качеств, свободных от притягивающих связей. Подход также позволяет устанавливать корреляции с длительностью, интенсивностью звука и хроматическими последовательностями в поле зрения [10]. Дальнейшие исследования будут посвящены «выражению жизни чисел» и специфически творческим последствиям такого интервального осознания.

Статья поступила в редакцию 12.06.2026; одобрена после рецензирования 01.07.2026; принята к публикации 01.07.2026.

The article was submitted 12.06.2026; approved after reviewing 01.07.2026; accepted for publication 01.07.2026.

Примечания

¹ Основополагающими послужили свидетельства пифагорейской школы и Филолая Кротонского. Среди теорий интервальных циклов, пользовавшихся наибольшей популярностью в последние десятилетия, можно вспомнить «решёта» Янниса Ксенакиса, преобразования Дэвида Левина, циклы Перле-Лански, модальные последовательности Анатоля Вьеру и «К-сетя» Генри Клоппенхауэра. Калейдоциклическая теория Луиджи Верди коренится в композиционной технике Скрябина и породила произведения, в которых высоты тесно коррелирует с длительностями. Размышления Верди одновременно обратились к теории множеств и теории интервальных циклов как подходам, которые сходятся к наиболее строгому контролю высотных классов и их взаимосвязей с областью длительностей (см. [1]).

² Треугольная последовательность соответствует количеству звуков обращения Пирамиденаккорда и использует все интервалы, доступные в традиционной системе, в восьми классах высоты звука. 13 февраля 1938 года Николай Слонимский внес решающий вклад в поиск гармоний, охватывающих все интервалы в своем *Grossmutterakkord*, который был связан с *Mutterakkord* Фрица Кляйна (см. [9; p. 173–180]).

³ В терминологии Вышнеградского полученная последовательность представляла бы собой случай цикла режима 12 с относительной плотностью 32 и объемом четырехчленного периода в $\frac{3}{4}$ тона, периодическая структура 1–2–3–3.

⁴ Существование периодических функций в числах Фибоначчи было отмечено Жозефом Луи Лагранжем в 1774 году. Учитывая интерес к последовательности Фибоначчи в истории развития интервальных систем, можно упомянуть внимание Конрада Хенфлинга (1648–1716), а также его предложение о системе с делением октавы на пятьдесят частей. Хенфлинг представил свою теорию Лейбницу в эпистолярной форме до 1710, которая нашла определенный отклик у некоторых английских теоретиков начала XIX века.

Список источников

1. Verdi L. *Caleidocicli musicali. Simmetrie infrante dei suoni*. Milano: Rugginenti, 2005. 230 p.
2. Вышнеградский И. Пирамида жизни: дневник, статьи, письма, воспоминания / пер. с фр. и нем. Е. Польдяева; авт. проекта, сост., ред. А. Бретаницкая, коммент. Е. Польдяева (при участии О. Бобрик). М.: Композитор, 2001. 320 с.
3. Wyschnegradsky I. Problèmes d'ultrachromatisme // *Polyphonie*. 1954. № 9–10. P. 129–142.
4. Wyschnegradsky I. *La loi de la pansonorité*. Genève: Contrechamps, 1996. 331 p.
5. Wyschnegradsky I. L'ultrachromatisme et les espaces non octavians // *Revue Musicale*. 1972. № 290–291. P. 71–141.
6. Wyschnegradsky I. *Libération du son: écrits 1916–1979 / textes réunis, présentés et annotés par Pascale Criton; traduction du russe par Michèle Kahn*. Lyon: Symétrie, 2013. 522 p.
7. Посвящается Ивану Александровичу Вышнеградскому (1893–1979) // *Музыкальная академия*. 1992. № 2 (639). С. 135–159.
8. Klein F. Die Grenze der Halbtonwelt // *Die Musik*. 1925. № 17/4. P. 284–285.
9. Slonimsky N. *Perfect pitch: A life story*. Oxford; New York: Oxford univ. press, 1989. 263 p.
10. Mösch J. *Geheimes zu Kugelpackungen und figurierten Zahlen* // Figshare (Preprint), 2023. URL: https://www.academia.edu/118105340/Geheimes_zu_Kugelpackungen_und_figurierten_Zahlen (дата обращения: 26.06.2026).

Информация об авторе

Буччо Д. — аспирант, Ph.D., пианист

References

1. Verdi, L. (2005), *Caleidocicli musicali. Simmetrie infrante dei suoni*, Rugginenti, Milano, Italy.
2. Wyschnegradsky, I. (2001), *Piramida zhizni: dnevnik, stat'i, pis'ma, vospominaniya* [Pyramid of life: diary, articles, letters, memoirs], Moscow: Composer, Russia.
3. Wyschnegradsky, I. (1954), "Problèmes d'ultrachromatisme", *Polyphonie*, vol. 9–10, pp. 129–142.
4. Wyschnegradsky, I. (1996), *La loi de la pansonorité*, Contrechamps, Genève, Switzerland.
5. Wyschnegradsky, I. (1972), "L'ultrachromatisme et les espaces non octavians", *Revue Musicale*, vol. 290–291, pp. 71–141.
6. Wyschnegradsky, I. (2013), *Libération du son: écrits 1916–1979*, Symétrie, Lyon, France.
7. (1992), "Dedicated to Ivan Alexandrovich Vyshnegradsky (1893–1979)", *Muzykal'naya akademiya* [Music Academy], vol. 2 (639), pp. 135–159.
8. Klein, F. (1925), "Die Grenze der Halbtonwelt", *Die Musik*, vol. 17/4, pp. 284–285.
9. Slonimsky, N. (1989), "Perfect pitch: A life story", Oxford university press, Oxford, New York, USA.
10. Mösch, J. (2023), "Geheimes zu Kugelpackungen und figurierten Zahlen", Figshare (Preprint), available at: https://www.academia.edu/118105340/Geheimes_zu_Kugelpackungen_und_figurierten_Zahlen (accessed 26 June 2026).

Information about the author

Buccio D. — Postgraduate Student, Ph.D., pianist